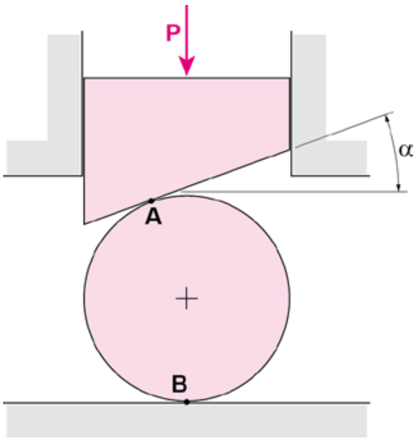
Meccanica applicata alle macchine

Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

Ed.: De Agostini

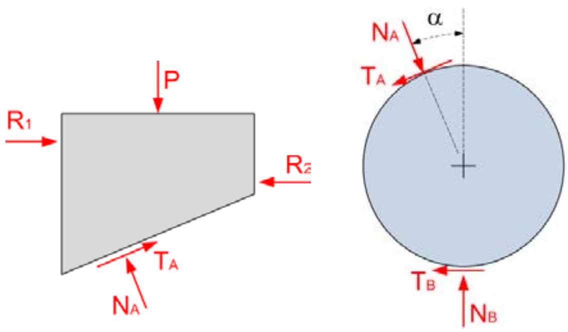
Esercizio 5.12

Determinare il massimo valore dell'angolo α per il quale il sistema rappresentato in figura è in equilibrio, indipendentemente dal valore della forza premente **P**. È assegnato il coefficiente di attrito statico nei punti di contatto **A** e **B**: f = 0,2.



Svolgimento

Il problema si risolve trovando il valore delle reazioni vincolari in funzione della forza applicata **P** ed imponendo le condizioni limite di aderenza in **A** ed in **B**.
Una volta tracciati i diagrammi di corpo libero di cuneo e cilindro, si possono scrivere le equazioni di equilibrio statico dei 2 corpi.



I punti di applicazione delle forze che agiscono sul blocco non sono rilevanti, purchè non si scriva l'equilibrio alle rotazioni; in effetti per questo corpo è sufficiente scrivere l'equilibrio delle forze verticali:

$$N_A \cos\alpha + T_A \sin\alpha = P \tag{1}$$

Per il cilindro, invece, si ottiene:

$$\begin{cases} N_A \cos\alpha + T_A \sin\alpha = N_B \\ N_A \sin\alpha = T_A \cos\alpha + T_B \\ T_A R = T_B R \end{cases} \tag{2}$$

Il sistema di 4 equazioni (1-2) contiene 5 incognite: le 4 reazioni vincolari e l'angolo α. La verifica di aderenza in **A** impone:

$$\frac{T_A}{N_A} < f \tag{3}$$

pertanto è necessario ricavare $\mathbf{T}_A$ in funzione di $\mathbf{N}_A$; dalla seconda e terza equazione in (2) si ha:

$$N_A \sin\alpha = T_A(1+\cos\alpha) \tag{4}$$

Allora tenendo conto della (4) la verifica di aderenza in **A** (3) si scrive:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} < f \tag{5}$$

Analogamente, l'aderenza in **B** richiede:

$$\frac{T_B}{N_B} < f \tag{6}$$

Dal sistema (2) si ottiene:

$$\frac{T_B}{N_B} = \frac{N_A \sin\alpha - T_A\cos\alpha}{N_A\cos\alpha + T_A\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha - \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{\cos\alpha + \dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{7}$$

Allora tenendo conto della (7) la verifica di aderenza in **B** (3) si scrive:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} < f \tag{8}$$

Le condizioni di aderenza (5) e (8) in entrambi i punti di contatto sono identiche; esse si scrivono anche:

$$\sin\alpha - f\cos\alpha - f < 0 \tag{9}$$

Utilizzando le formule parametriche, è possibile esprimere il seno ed il coseno in funzjone di $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\frac{2t}{1+t^2} < f\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \tag{10}$$

che risolta fornisce:

$$t < f \tag{11}$$

ovvero:

$$\alpha < 2\arctan(f) \quad \rightarrow \quad \alpha < 22.6° \tag{12}$$