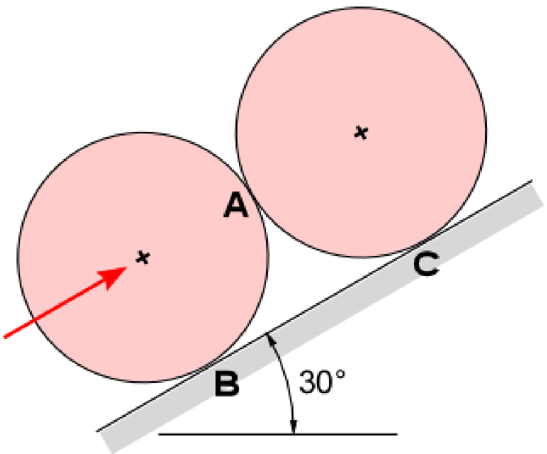
Meccanica applicata alle macchine

Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

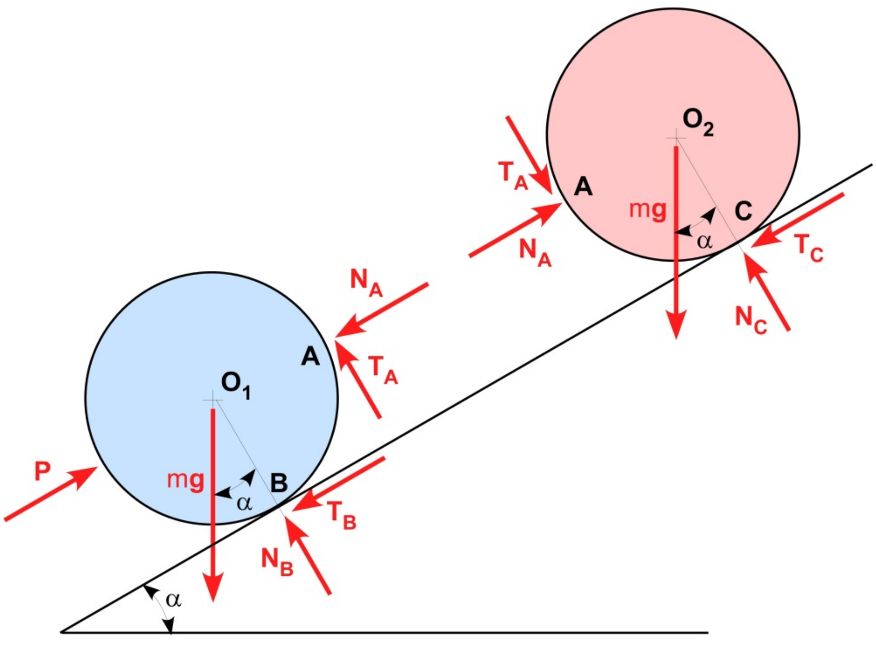
Ed.: De Agostini

Esercizio 5.22

Ognuno dei cilindri in figura ha una massa di $m=75\ kg$ e raggio di $r=150\ mm$. Se il coefficiente di attrito statico nei punti di contatto vale rispettivamente $f_A=0,3$, $f_B=0,25$, $f_C=0,4$, determinare la minima forza **P** che è necessario applicare all'asse del primo cilindro per innescare il movimento del sistema (si trascurino le resistenze al rotolamento).



Svolgimento



Si tracci il diagramma di corpo libero del sistema, rappresentato in figura, e si scrivano le equazioni di equilibrio statico dei 2 cilindri:

$$\begin{cases} P - T_B - N_A - mg \cdot \sin\alpha = 0 \\ N_B + T_A - mg \cdot \cos\alpha = 0 \\ T_B \cdot r - T_A \cdot r = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} N_A - T_C - mg \cdot \sin\alpha = 0 \\ N_C - T_A - mg \cdot \cos\alpha = 0 \\ T_C \cdot r - T_A \cdot r = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Il sistema (1-2) è composto da 6 equazioni in cui compaiono 7 incognite: per la sua risoluzione è necessaria l'introduzione di una ulteriore equazione, che può essere scritta facendo opportune ipotesi sulle condizioni limite di moto incipiente. Questo può essere innescato da una delle seguenti condizioni limite:

1. il cilindro inferiore rotola (in senso orario) senza strisciamento né nel contatto col suolo, né nel contatto col secondo cilindro: pertanto quest'ultimo sale lungo il piano inclinato rotolando in senso anti-orario e quindi con *strisciamento in C* rispetto al piano inclinato
2. il cilindro superiore rotola (in senso orario) senza strisciamento né nel contatto col suolo, né nel contatto col primo cilindro: pertanto quest'ultimo sale lungo il piano inclinato rotolando in senso anti-orario e quindi con *strisciamento in B* rispetto al piano inclinato
3. entrambi i cilindri risalgono il piano inclinato in puro rotolamento rispetto al piano stesso: poiché entrambi ruotano in senso orario, sarà presente *strisciamento in A*, punto di contatto nel quale i 2 cilindri hanno velocità di verso opposto

Altri casi teoricamente ipotizzabili comporterebbero lo strisciamento in 2 (o 3) punti di contatto (ad esempio i 2 cilindri che risalgono il piano strisciando rispetto a questo ma senza moto relativo fra di essi): tali casi non sono fisicamente realizzabili in quanto le 7 forze incognite dovrebbero soddisfare 8 relazioni, cosa in generale impossibile (se non per particolari relazioni tra i parametri fisici del sistema).

Caso 1: strisciamento in C

Il secondo cilindro sale lungo il piano inclinato rotolando in senso anti-orario e quindi con *strisciamento in C* rispetto al piano inclinato.

Condizione limite di aderenza nel punto **C**:

$$T_C = f_C \cdot N_C \quad (3)$$

Si noti che $\mathbf{T_C}$ deve essere rappresentata in figura con il verso corretto (e quindi nelle equazioni deve comparire con il giusto segno) mentre il verso di $\mathbf{T_A}$ e $\mathbf{T_B}$ sarà determinato dal segno delle relative incognite, una volta risolto il sistema di equazioni di equilibrio.

Quindi il sistema (1-3) diventa:

$$\begin{cases} P - T_B - N_A = mg \cdot \text{sen}\alpha \\ N_B + T_A = mg \cdot \cos\alpha \\ N_A - T_C = mg \cdot \text{sen}\alpha \\ N_C - T_A = mg \cdot \cos\alpha \\ T_A = T_B = T_C = f_C \cdot N_C \end{cases} \tag{4}$$

che risolto fornisce:

$$\begin{cases} P = 2\left(\dfrac{f_C}{1-f_C}\cos\alpha + \text{sen}\alpha\right)mg = 1585 \quad N \\ N_A = \left(\dfrac{f_C}{1-f_C}\cos\alpha + \text{sen}\alpha\right)mg = 793 \quad N \\ N_B = \dfrac{1-2f_C}{1-f_C}mg\cos\alpha = 212 \;\; N \\ N_C = \dfrac{\cos\alpha}{1-f_C}mg = 1062 \quad N \\ T_A = T_B = T_C = f_C \cdot N_C = \dfrac{f_C \cdot \cos\alpha}{1-f_C}mg = 425 \quad N \end{cases} \tag{5}$$

Caso 2: strisciamento in B

Il primo cilindro sale lungo il piano inclinato rotolando in senso anti-orario e quindi con *strisciamento in B* rispetto al piano inclinato.

Condizione limite di aderenza nel punto **B**:

$$T_B = f_B \cdot N_B \tag{6}$$

Si noti che $\mathbf{T_B}$ deve essere rappresentata in figura con il verso corretto (e quindi nelle equazioni deve comparire con il giusto segno) mentre il verso di $\mathbf{T_A}$ e $\mathbf{T_C}$ sarà determinato dal segno delle relative incognite, una volta risolto il sistema di equazioni di equilibrio.

Quindi il sistema (1), (2), (6) diventa:

$$\begin{cases} P - T_B - N_A = mg \cdot \text{sen}\alpha \\ N_B + T_A = mg \cdot \cos\alpha \\ N_A - T_C = mg \cdot \text{sen}\alpha \\ N_C - T_A = mg \cdot \cos\alpha \\ T_A = T_B = T_C = f_B \cdot N_B \end{cases} \tag{7}$$

che risolto fornisce:

$$
\begin{cases}
P = 2\left(\dfrac{f_B}{1+f_B}\cos\alpha + \mathrm{sen}\alpha\right)mg = 991 \quad N \\
N_A = \left(\dfrac{f_B}{1+f_B}\cos\alpha + \mathrm{sen}\alpha\right)mg = 495 \quad N \\
N_B = \dfrac{\cos\alpha}{1+f_B}mg = 510 \quad N \\
N_C = \dfrac{1+2f_B}{1+f_B}\cos\alpha \cdot mg = 765 \quad N \\
T_A = T_B = T_C = f_B \cdot N_B = \dfrac{f_B \cdot \cos\alpha}{1+f_B}mg = 127 \quad N
\end{cases}
\tag{8}
$$

Caso 3: strisciamento in A

I 2 cilindri risalgono il piano inclinato rotolando entrambi in senso orario e quindi con *strisciamento in A*, loro punto di contatto.

Condizione limite di aderenza nel punto **A**:

$$
T_A = f_A \cdot N_A \tag{9}
$$

Si noti che $\mathbf{T_A}$ deve essere rappresentata in figura con il verso corretto (e quindi nelle equazioni deve comparire con il giusto segno) mentre il verso di $\mathbf{T_B}$ e $\mathbf{T_C}$ sarà determinato dal segno delle relative incognite, una volta risolto il sistema di equazioni di equilibrio.

Quindi il sistema (1), (2), (9) diventa:

$$
\begin{cases}
P - T_B - N_A = mg \cdot \mathrm{sen}\alpha \\
N_B + T_A = mg \cdot \cos\alpha \\
N_A - T_C = mg \cdot \mathrm{sen}\alpha \\
N_C - T_A = mg \cdot \cos\alpha \\
T_A = T_B = T_C = \mu_A \cdot N_A
\end{cases}
\tag{10}
$$

che risolto fornisce:

$$
\begin{cases}
P = 2\dfrac{\mathrm{sen}\alpha}{1-f_A}mg = 1051 \quad N \\
N_A = \dfrac{\mathrm{sen}\alpha}{1-f_A}mg = 526 \quad N \\
N_B = \left(\cos\alpha - \dfrac{f_A}{1-f_A}\mathrm{sen}\alpha\right)mg = 480 \quad N \\
N_C = \left(\cos\alpha + \dfrac{f_A}{1-f_A}\mathrm{sen}\alpha\right)mg = 795 \quad N \\
T_A = T_B = T_C = f_A \cdot N_A = \dfrac{f_A\mathrm{sen}\alpha}{1-f_A}mg = 158 \quad N
\end{cases}
\tag{11}
$$

Confrontando i risultati dei 3 casi studiati, si vede che la minima forza *P* è quella ottenuta nel **secondo caso**: pertanto il cilindro inizia a muoversi quando è sottoposto ad una forza *P=991 N* ed in questo caso viene meno l'aderenza nel punto ***B***.

L'esercizio si sarebbe svolto più velocemente andando a verificare l'aderenza in **A** e **B** al termine del primo caso:

$$T_A / N_A = 0{,}54 > f_A (= 0{,}30)$$

$$T_B / N_B = 2 > f_B (= 0{,}25)$$

Si nota che non c'è aderenza né in **A** né in **B** e che il contatto più lontano dalle condizioni limite è il punto **B**, per cui conviene passare direttamente ad ipotizzare uno strisciamento in quel punto e successivamente verificare le condizioni di aderenza in **A** ed in **C**.